АТТРАКТОР СМЕЙЛА-ВИЛЬЯМСА В СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ БОНХОФФЕРА – ВАН ДЕР ПОЛЯ С МОДУЛИРУЕМЫМ УПРАВЛЯЮЩИМ ПАРАМЕТРОМ

В. П. Круглов[1], С. П. Кузнецов[1,2]

[1]*Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН*

[2]*Удмуртский государственный университет, Ижевск*

E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com

Соленоид Смейла-Вильямса — хорошо известный пример однородно гиперболического аттрактора [1,2,3]. Аттрактор Смейла-Вильямса возникает, если одна из переменных динамической системы циклическая (сдвиг на 2π приводит к идентичному физическому состоянию) и за характерный временной интервал подвергается растягивающему отображению окружности $\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \mathrm{const}\left(\mathrm{mod}\, 2\pi\right)$ ($M \geq 2$ целое), а по остальным переменным в фазовом пространстве происходит сильное сжатие. Нелинейные системы с однородно гиперболическими аттракторами интересны для коммуникационных и информационных систем, поскольку обладают несколькими практически полезными свойствами. Одно из этих свойств — грубость или структурная устойчивость, проявляющееся в сохранении устройства аттрактора при небольших вариациях параметров системы. Другое свойство состоит в том, что любая траектория однородно гиперболического аттрактора однозначно кодирует бесконечную последовательность, составленную из конечного набора символов. Для соленоида Смейла-Вильямса с фактором растяжения угловой переменной M алфавит состоит из M символов.

Мы предлагаем рассмотреть систему из двух осцилляторов Бонхоффера — ван дер Поля $\ddot{x} - \left(a - x^2\right)\dot{x} + x = K$, у которых периодическим внешним воздействием обеспечивается модуляция параметров, управляющих бифуркацией Андронова-Хопфа, так, что осцилляторы поочередно возбуждаются с переходом от колебаний малой амплитуды к релаксационным автоколебаниям. Поскольку с увеличением управляющего параметра основная частота автоколебаний уменьшается, при подходящем подборе параметров удается реализовать режимы с аттракторами Смейла-Вильямса, характеризуемыми различными факторами растяжения M.

Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\ddot{x} - \left(f\left(t/T + 1/4\right) - x^2\right)\dot{x} + x = K + \varepsilon\left(y - x\right),\\ \ddot{y} - \left(f\left(t/T - 1/4\right) - y^2\right)\dot{y} + y = K + \varepsilon\left(x - y\right),\\ f(\tau) = \left\{a, 0 < \tau \leq \tau_1;\ \frac{(a-c)\tau + c\tau_1 - a\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}, \tau_1 < \tau \leq \tau_2;\ \frac{(c-a)\tau + a\tau_2 - c}{\tau_2 - 1}, \tau_2 < \tau \leq 1,\right\}\\ f(\tau + 1) = f(\tau),\end{gathered} \tag{1}$$

где $f(\tau)$ – периодическая функция, описывающая модуляцию управляющего параметра, K – постоянная, ε — коэффициент связи.

На рис. 1 показаны иллюстрации, полученные при численном моделировании динамики системы (1) с параметрами $K = 0.5$, $c = -2$, $\varepsilon = 0.01$, $T = 200$, $\tau_1 = 0.4$, $\tau_2 = 0.5$.

Слева на рис.1 приводится диаграмма изменения фазы колебаний первого осциллятора за период модуляции, построенная для случая $a = 5.49$. Как можно видеть, график соответствует растягивающему отображению окружности с фактором 4. Показатели Ляпунова отображения Пуанкаре составили: $\Lambda_1 = 1.3791 \pm 0.004$, $\Lambda_2 = -34.45 \pm 0.07$, $\Lambda_3 = -396.3 \pm 0.2$, $\Lambda_4 = -1604.7 \pm 0.3$. Старший показатель близок к ln4, показателю Ляпунова растягивающего отображения окружности. Остальные показатели отрицательные. На рис. 1 справа показана зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра *a* для стробоскопического отображения Пуанкаре. В определенных интервалах изменения параметра реализуются аттракторы Смейла-Вильямса с факторами $M = 4, 9, 16, 25$. В этих интервалах старший показатель Ляпунова зависит от параметра плавно, что говорит о структурной устойчивости аттракторов.

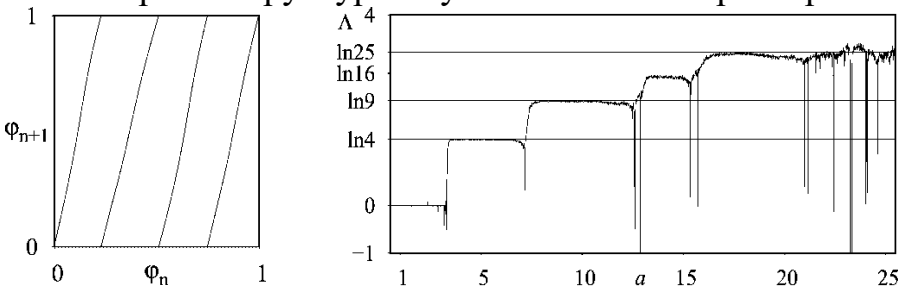

Рис. 1. Итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора (слева) и график зависимости старшего показателя Ляпунова от параметра *a* (справа)

Был выполнен тест гиперболичности аттракторов отображения Пуанкаре при значениях параметров, соответствующих различным хаотическим режимам динамики. Тест основан на проверке отсутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий аттрактора и заключается в построении гистограмм распределений углов между многообразиями. Векторы, задающие касательные подпространства к устойчивым и неустойчивым многообразиям траектории, были получены при численном решении уравнений в вариациях вдоль одной и той же траектории в прямом и обратном времени [3]. Для аттракторов со старшими показателями Ляпунова, близкими к величине $\ln M$, нулевых значений углов не было обнаружено, гистограммы дистанцированы от нуля, что подтверждает их гиперболическую природу.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 17-12-01008.

Библиографический список

1. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. Москва: Факториал, 1999.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН, 2011, **181**, №2. С. 121-149.
3. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos, Phys. Rev. E, 2012, **85**, 4, 015203.